

**Розв'язки задач
фінального туру
Всеукраїнської олімпіади з фізики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка – 2026**

Задача 1

На гладкому столі перебуває брусок, прикріплений за допомогою пружини до вертикальної стіни, який здійснює гармонічні коливання з деякою амплітудою. В момент проходження положення рівноваги на нього вертикально падає пластилінова куля, маса якої в n разів менша, ніж маса бруска, і прилипає до його поверхні. Визначити у скільки разів зменшиться амплітуда коливань бруска. Тертя між бруском і столом відсутнє.

Розв'язок

Нехай маса бруска дорівнює M , його швидкість при проходженні положення рівноваги v_0 , а швидкість одразу після прилипання пластилінової кульки – v_1 . За законом збереження імпульсу в момент прилипання кульки:

$$Mv_0 = \left(M + \frac{M}{n} \right) v_1, \quad (1)$$

звідки максимальна швидкість бруска з кулькою:

$$v_1 = \frac{Mv_0}{M + \frac{M}{n}} = \frac{nv_0}{n+1}. \quad (2)$$

Нехай жорсткість пружини дорівнює k , а амплітуди коливань бруска до та після прилипання кульки – відповідно A_0 та A_1 . Тоді за законом збереження енергії:

$$\frac{kA_0^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{2}, \quad (3)$$

$$\frac{kA_1^2}{2} = \frac{\left(M + \frac{M}{n} \right) v_1^2}{2} = \frac{M(n+1)v_1^2}{2n}. \quad (4)$$

З цих рівнянь знаходимо:

$$\frac{A_0^2}{A_1^2} = \frac{Mv_0^2}{2} \cdot \frac{2n}{M(n+1)v_1^2} = \frac{nv_0^2}{(n+1)v_1^2} = \frac{nv_0^2(n+1)^2}{(n+1)n^2v_0^2} = \frac{(n+1)}{n}. \quad (5)$$

Отже,

$$\frac{A_0}{A_1} = \sqrt{\frac{(n+1)}{n}}. \quad (6)$$

Задача 2

У вертикальному циліндрі під легким рухомим поршнем знаходиться гелій. У положенні рівноваги на висоті $h_0=50$ см від дна циліндра поршень утримується атмосферним тиском. Не змінюючи температуру газу зверху на поршень повільно насипають $m=200$ г піску. Нехтуючи тертям, визначити кількість теплоти, яку необхідно надати газу для повернення у початкове положення.

Розв'язок

Початковий тиск гелію в циліндрі дорівнює атмосферному p_0 , а після насипання піску тиск дорівнюватиме $p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}$, де S – площа поршня. Оскільки температура газу не змінюється, то скористаємося законом Бойля-Маріотта:

$$p_0 V_0 = p_1 V_1, \quad (1)$$

де об'єми гелію в кожному стані $V_0 = h_0 S$, $V_1 = (h_0 - \Delta h) S$.

Тоді закон Бойля-Маріотта перепишемо у вигляді:

$$p_0 h_0 S = \left(p_0 + \frac{mg}{S} \right) (h_0 - \Delta h) S, \quad (2)$$

звідки

$$p_0 h_0 = p_0 h_0 + \frac{mgh_0}{S} - p_0 \Delta h - \frac{mg \Delta h}{S}, \quad (3)$$

або

$$\left(\frac{mg}{S} + p_0 \right) \Delta h = \frac{mgh_0}{S}, \quad (4)$$

тому

$$\Delta h = \frac{mgh_0}{mg + Sp_0}. \quad (5)$$

Робота газу, яку необхідно виконати для повернення поршня у вихідне положення:

$$A = p_1 \Delta V = \left(p_0 + \frac{mg}{S} \right) \frac{mgh_0 S}{mg + Sp_0} = \frac{mg + Sp_0}{S} \cdot \frac{mgh_0 S}{mg + Sp_0} = mgh_0. \quad (6)$$

Відповідно, кількість теплоти:

$$Q = \Delta U + A, \quad (7)$$

де зміна внутрішньої енергії

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} p_1 \Delta V = \frac{3}{2} A. \quad (8)$$

Отже,

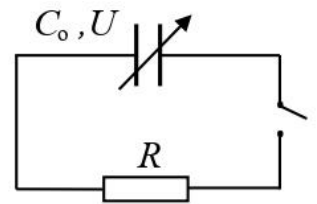
$$Q = \frac{3}{2} A + A = \frac{5}{2} A = \frac{5}{2} mgh_0, \quad (9)$$

тобто

$$Q = \frac{5}{2} \cdot 0,2 \cdot 9,8 \cdot 0,5 = 2,45 \text{ (Дж)},$$

Задача 3

Змінний конденсатор з початковою ємністю C_0 , заряджений до напруги U , замикають через резистор з опором R (див. рис.). Як треба змінювати з часом ємність конденсатора, щоб у колі протікав постійний струм? Яку потужність при цьому розвивають зовнішні сили, завдяки яким змінюється ємність конденсатора?



Розв'язок

1.) Струм у колі $I = U / R$ сталий, отже і напруга на конденсаторі має бути сталою. Нехай початковий момент часу $t_0 = 0$. Тоді за час Δt у колі пройде заряд

$\Delta q = It = \frac{Ut}{R}$. В момент часу t :

$$\frac{q_0}{C_0} = \frac{q_0 - \Delta q}{C(t)} = \frac{q_0 - (Ut / R)}{C(t)}, \quad (1)$$

звідки

$$C(t) = C_0 - \frac{t}{R}. \quad (2)$$

2.) Струм через резистор підтримується за рахунок як розряду конденсатора, так і роботи зовнішніх сил, які змінюють електричне поле в конденсаторі. Тому кількість теплоти, що виділяється на резисторі за час dt , визначається роботою зовнішніх сил dA та зміною енергії конденсатора (розрядженням конденсатора). За законом збереження енергії:

$$d\left(\frac{CU^2}{2}\right) + dA = \frac{U^2}{R} dt, \quad (3)$$

де $d\left(\frac{CU^2}{2}\right)$ - зміна енергії конденсатора. Очевидно:

$$d\left(\frac{CU^2}{2}\right) = \left(\frac{CU^2}{2}\right)' dt = \frac{U^2}{2} \left(\frac{dC}{dt}\right) dt \quad (4)$$

Оскільки $\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt}\left(C_0 - \frac{t}{R}\right) = -\frac{1}{R}$, зміна енергії конденсатора (4) дорівнює $d\left(\frac{CU^2}{2}\right) = -\frac{U^2}{2R} dt$. Знак мінус вказує на те, що енергія конденсатора зменшується, тобто для підтримання постійного струму необхідне додаткове джерело енергії (в даному випадку – зовнішні механічні сили). Рівняння (3) набуває вигляду:

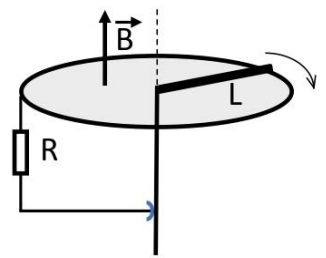
$$-\frac{U^2}{2R} dt + dA = \frac{U^2}{R} dt \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{U^2}{2R} + \frac{U^2}{2R} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{3U^2}{2R} \quad (5)$$

Отже, потужність, яку розвивають зовнішні сили, дорівнює:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{3U^2}{2R}$$

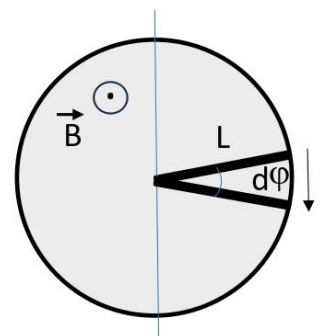
Задача 4

Металевий дріт, зігнутий під прямим кутом, обертають у магнітному полі з індукцією $B = 0,1$ Тл так, що вектор індукції магнітного поля перпендикулярний до площини обертання. Частина дроту довжиною $L = 20$ см (перемичка) ковзає без тертя по металевому кільцю з частотою обертання $\nu = 100 \text{ с}^{-1}$ (див. рис.). До кільця та дроту через ковзаючий контакт приєднано резистор $R = 2$ Ом. Яка кількість теплоти виділиться в опорі за час $\tau = 20$ с? Електричний опір усіх елементів схеми, окрім опору R , не враховувати.



Розв'язок

Нехай за час dt частина дроту довжиною L (перемичка) повертається на кут $d\varphi$. Площа сектору, який описує перемичка, дорівнює $dS = \frac{L^2 d\varphi}{2}$, а магнітний потік через цю площу $d\Phi = BdS = \frac{BL^2 d\varphi}{2}$. За законом електромагнітної індукції в перемичці виникає е.р.с. індукції:



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{BL^2 d\varphi}{2dt} = \frac{BL^2 \omega}{2}, \quad (1)$$

де $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ – кутова швидкість перемички. Перемичка разом з опором R утворює замкнене коло, в якому проходить струм силою

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1}{R} \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{BL^2 \omega}{2R} = \frac{\pi BL^2 \nu}{R}, \quad (2)$$

де враховано, що $\omega = 2\pi\nu$.

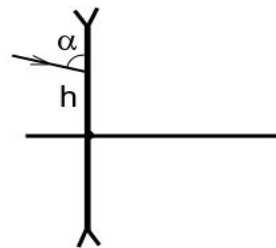
За законом Джоуля-Ленца кількість теплоти, що виділяється в резисторі за час τ , дорівнює

$$W = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \tau = \frac{(\pi BL^2 \nu)^2 \tau}{R} \quad (3)$$

Обчислення $W = \frac{(3,14 \cdot 0,1 \cdot 0,04 \cdot 100)^2 \cdot 20}{2} \approx 15,8 \text{ (Дж)}$ (4)

Задача 5

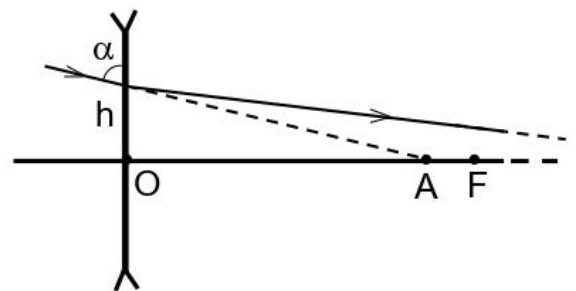
Світловий промінь падає на тонку розсіювальну лінзу під кутом α до площини лінзи і заломлюється на відстані $h=1$ см від її оптичного центру (див. рис.). Оптична сила лінзи $D=-10$ дптр. При якому куті α цей промінь після заломлення перетинає головну оптичну вісь на відстані $10F$ від центра лінзи? Починаючи з якого значення кута α промінь взагалі не перетинає головну оптичну вісь?



Розв'язок

1.) Продовження променя, що падає на площину лінзи під кутом ковзання α , перетинає головну оптичну вісь у точці А, яку можна розглядати як уявне джерело світла (див. рис.). За формулою тонкої лінзи

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{F} = -D, \quad (1)$$



де d - відстань від лінзи до уявного джерела (відрізок ОА), f - відстань від лінзи до зображення; F, D - фокусна відстань та оптична сила лінзи. Враховано, що для розсіювальної лінзи та уявного джерела величини d, F, D від'ємні.

Як видно з рисунка
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{h}{d} \Rightarrow d = h \operatorname{tg} \alpha \quad (2)$$

З (1), (2) отримуємо
$$-\frac{1}{h \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{F} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{Ff}{h(F + f)} \quad (3)$$

Оскільки $f = 10F$, то вираз (3) набуває вигляду

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10F^2}{h(F + 10F)} = \frac{10}{11} \cdot \frac{F}{h} = \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{hD} \quad (4)$$

Обчислення:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{hD} = \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{0,01 \cdot 10} = \frac{100}{11} \approx 9,09; \text{ звідки } \alpha = 83,7^\circ$$

2) У випадку, коли заломлений промінь паралельний головній оптичній осі $f = \infty$, кут α_0 визначиться з умови

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{\infty} = -\frac{1}{F} \Rightarrow h \operatorname{tg} \alpha_0 = F \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1}{hD} \quad (5)$$

Обчислення:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1}{0,01 \cdot 10} = 10; \text{ звідки } \alpha_0 = 84,3^\circ.$$

Отже, при кутах $\alpha \geq 84,3^\circ$ заломлений промінь не перетинає головну оптичну вісь.