Розв'язок задач першого дистанційного туру Всеукраїнської студентської олімпіади з фізики 2026 Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Задача 1. Український спортсмен-скелетоніст Владислав Гераскевич масою m=120 кг (разом зі спорядженням) розпочинає спуск зі швидкістю v_0 = 30 км/год (після розгону). Довжина траси становить 1500 м при середньому куті нахилу α=9°. Коефіцієнт тертя полозів об лід μ=0.02, середня сила опору повітря F_{on} =20 Н. Визначити:

а) швидкість спортсмена на фініші та час спуску, якщо вважати рух рівноприскореним;

б) перевантаження n, яке діє на спортсмена на фінальному віражі. На фінішній ділянці спортсмен входить у віраж з радіусом кривизни R=40 м на швидкості v = 35м/с.

В реальних змаганнях на Олімпійських іграх 2026 року на тренувальних заїздах Владислав Гераскевич показав середній час спуску 56,5 с. Порівняйте отриманий в задачі результат з реальним та вкажіть найбільш імовірні причини розходження.

Розв'язок:

а) На спортсмена під час спуску діють три сили: сила тяжіння, сила реакції, що є сумою сили нормальної реакції та сили тертя та сила опору повітря. Запишемо другий закон Ньютона у векторній формі:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \overrightarrow{F_{\text{оп}}}.$$

Спроектуємо це рівняння на осі x (вздовж схилу) та y (перпендикулярно схилу). Отримаємо:

$$ma_x = mgsin(\alpha) - F_{\text{тр}} - F_{\text{оп}} \text{ та } 0 = N - mgcos(\alpha),$$

визначимо звідси

$$a_x = gsin(\alpha) - g\mu cos(\alpha) - F_{\text{оп}}/m.$$

Після підстановки значень, отримаємо $a_x \approx 1{,}17$ м/с^2.

Для рівноприскореного руху вздовж осі x, з рівнянь кінематики відомо:

$l = \frac{v_к^2 - v_0^2}{2a_x}$ та $v_к = v_0 + a_x t$, де $v_к$ – кінцева швидкість спортсмена, t - час руху.

Знаходимо з цих рівнянь:

-час руху t≈44 с;

-кінцева швидкість спортсмена $v_к$≈59.8м/с.

б) Перевантаження — це відношення ваги спортсмена на віражах, до ваги спортсмена в нерухомому стані:

$$n = \frac{P}{P_0} = \frac{m(g+a_n)}{mg},$$

Де a_n- нормальне (доцентрове) прискорення, що виникає на повороті:

$a_n = \frac{v^2}{R}$.

Отже, $n = 1 + \frac{v^2}{gR} \approx 4.1$

Причини розходження отриманого в задачі часу руху з реальним часом спуску Владислава Гераскевича на Олімпійських іграх 2026:

1) траса не є прямою, і відповідно, рух скелетоніста не є рівноприскореним;

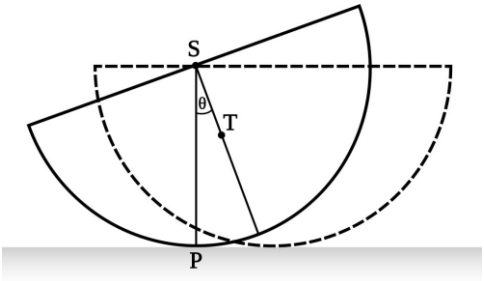
2) на поворотах спортсмен може гальмувати;

3) сила опору повітря залежить від швидкості спортсмена і змінюється в процесі руху;

4) поверхня льоду може мати нерівності, що призводить до іншого значення коефіцієнту тертя.

Задача 2. На горизонтальному столі розміщений напівциліндр радіусом R та маси M таким чином, що його плоска поверхня спрямована вгору. Між столом і напівциліндром існує тертя. Припустимо, що в початковий момент часу напівциліндр нерухомий та повернутий на кут Θ навколо осі циліндра від положення рівноваги. Знайдіть мінімальне значення коефіцієнта тертя, за якого циліндр зможе здійснювати чисте кочення (без проковзування).

Розв'язок:



Для півциліндра радіуса R центр мас (точка T) розташований на осі симетрії на відстані d від геометричного центра S:

$$d = \frac{4R}{3\pi}$$

Нехай θ — кут між плоскою поверхнею та горизонтом. У початковий момент $\theta=\theta_0$, і циліндр перебуває у спокої. Прискорення буде максимальним у цій точці максимального відхилення. Отже, для знаходження мінімального коефіцієнту тертя потрібно розглянути лише цю точку.

Момент інерції відносно геометричної осі S становить $I_S = 1/2\ MR^2$. Момент інерції відносно центра мас T:

$$I_T = I_S - Md^2 = M\left(\frac{1}{2}R^2 - d^2\right)$$

Момент інерції відносно точки контакту P:

$$I_P = I_T + M \cdot \overline{TP}^2 = MR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{2d}{R}\cos\theta_0\right)$$

Рівняння моментів відносно точки P має вигляд:

$$Mgd\sin\theta_0 = I_P\beta$$

Звідси кутове прискорення β дорівнює:

$$\beta = \frac{Mgd\sin\theta_0}{I_P} = \frac{gd\sin\theta_0}{R^2\left(\frac{3}{2} - \frac{2d}{R}\cos\theta_0\right)}$$

Прискорення центра мас T у горизонтальному (a_x) та вертикальному (a_y) напрямках:

$a_x = (R - d\cos\theta_0)\,\beta$

$a_y = (d\sin\theta_0)\,\beta$

За другим законом Ньютона для сил:

По горизонталі: $f = M a_x = M(R - d\cos\theta_0)\,\beta$ (сила тертя)

По вертикалі: $N = M(g + a_y)$ (нормальна реакція)

Для відсутності ковзання необхідно: $f \le \mu_s N$.

Мінімальне значення коефіцієнта тертя:

$$\mu_s = \frac{f}{N} = \frac{(R - d\cos\theta_0)\beta}{g + (d\sin\theta_0)\beta}$$

після підстановки і спрощення отримуємо остаточну формулу:

$$\mu_s = \frac{8\sin\theta_0(3\pi - 4\cos\theta_0)}{27\pi^2 - 48\pi\cos\theta_0 + 32\sin^2\theta_0}$$

Задача 3. Атмосферу Марса можна вважати такою, що складається лише з дуже розрідженого CO_2. Молярна маса цієї атмосфери позначається через $\boldsymbol{\mu}$, і на довільній заданій висоті атмосферу можна розглядати як ідеальний газ у стані рівноваги. Маса Марса становить M_m (що набагато більше за загальну масу марсіанської атмосфери), а його радіус — R_m. Припустимо, що залежність густини атмосфери від висоти h над поверхнею Марса описується формулою:

$$\rho(h) = \rho_0\left(1 + \frac{h}{R_m}\right)^{1-n}$$

де ρ_0 — константа, а n ($n > 4$) — також константа. Виведіть вираз для температури $T(h)$ марсіанської атмосфери як функції висоти h.

Розв’язок:

В атмосфері Марса на певній висоті h виділимо тонку горизонтальну область у формі паралелепіпеда. Об'єм цієї області становить V, маса атмосфери всередині — M, тиск — $P(h)$, а температура — $T(h)$. Оскільки шар дуже тонкий, густину, тиск і температуру газу можна вважати постійними.

Рівняння стану ідеального газу:

$$P(h)V = nRT(h) \qquad (1)$$

Об'єм атмосфери всередині області:

$$V = \frac{M}{\rho(h)} \qquad (2)$$

Кількість речовини атмосфери Марса всередині області:

$$n = \frac{M}{\mu} \qquad (3)$$

Об'єднавши рівняння (1), (2) та (3), отримуємо:

$$T(h) = \frac{P(h)\mu}{\rho(h)R} \qquad (4)$$

Розглянемо тонкий шар атмосфери у формі сферичного сегмента від висоти *x* до *x+dx*, що охоплює тілесний кут ΔΩ. Нехай ΔΩ буде дуже малим, щоб радіальні лінії з боків сегмента можна було вважати паралельними одна одній. Площа сегмента – $\Delta\Omega\,(R_m + x)^2$, його об'єм – $\Delta\Omega\,(R_m + x)^2 dx$.

З рівності сил, що діють на сегмент, випливає:

$$[P(x+dx) - P(x)] \cdot \Delta\Omega(R_m + x)^2 + \rho(x)g(x) \cdot \Delta\Omega(R_m + x)^2 dx = 0$$

Тобто

$$\frac{dP}{dx} = -\rho(x)g(x) \qquad (5)$$

Де прискорення вільного падіння на висоті *x* від поверхні Марса становить:

$$g(x) = \frac{GM_m}{(R_m + x)^2}$$

Підставивши це у рівняння (5) та виконавши інтегрування, отримуємо:

$$P(h) = GM_m \int_h^\infty \frac{\rho(x)}{(R_m + x)^2} dx \qquad (6)$$

Підставимо рівняння (6) у рівняння (4) і використаємо вираз для розподілу густини, наведений в умові задачі:

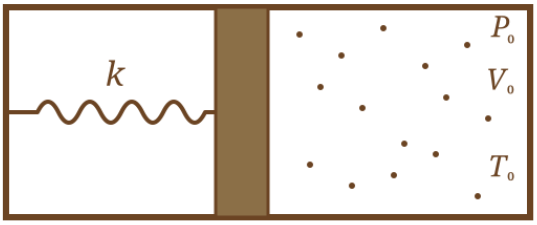
$$\rho(h) = \rho_0 \left(1 + \frac{h}{R_m}\right)^{1-n}$$

У результаті отримуємо:

$$\boxed{T(h) = \frac{\mu G M_m}{nR(R_m + h)}}$$

Задача 4. Знайдіть теплоємність системи, що складається з перекритої поршнем посудини з одноатомним газом (параметри газу P_0, V_0, T_0). Поршень утримується пружиною (див. Рис.1). Ліворуч від поршня вакуум. Якщо газ відкачати, поршень доторкнеться до правої стінки посудини, а пружина буде недеформованою. Теплоємностями посудини, поршня і пружини знехтувати.

Рис.1 *До задачі 4.*



Розв'язок:

Уведемо A — площа поршня, x — його відстань від правої стінки (якої пружина торкається у своєму недеформованому стані; тобто x — видовження пружини), тоді об'єм, зайнятий газом $V = Ax$.

У стані рівноваги тиск газу зрівноважує силу, з якою пружина діє на поршень:

$$PA = kx \Rightarrow P = \frac{k}{A^2}V \equiv \alpha V,$$

де уведено позначення $\alpha = k/A^2$. Із умови задачі відомі (P_0, V_0), які задовольняють отриманим вище рівностям, тож

$$\alpha = \frac{P_0}{V_0}.$$

Ураховуючи рівняння стану $PV = nRT$,
разом з $P = \alpha V$ маємо

$$\alpha V^2 = nRT \Rightarrow V(T) = \sqrt{\frac{nR}{\alpha}}T.$$

Звідси

$$\frac{dV}{dT} = \frac{V}{2T}.$$

Тепер можна знйти теплоємність системи загалом. Оскільки роботи над "зовнішнім світом" система не виконує, то перший закон термодинаміки дає для наданої системі кількості теплоти

$$\delta Q = dU_{\text{газ}} + dE_{\text{пруж}}.$$

Для цих доданків маємо:

- Для одноатомного газу

$$U_{\text{газ}} = \frac{3}{2}nRT \Rightarrow dU_{\text{газ}} = \frac{3}{2}nRdT.$$

- Енергія пружини

$$E_{\text{пруж}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\frac{k}{A^2}V^2 = \frac{1}{2}\alpha V^2 = \frac{1}{2}nRT \quad \text{(використано } \alpha V^2 = nRT\text{)}.$$

Тоді

$$dE_{\text{пруж}} = \frac{1}{2}nRdT.$$

Отже,

$$\delta Q = \left(\frac{3}{2}nR + \frac{1}{2}nR\right)dT = 2nRdT.$$

звідки знайдемо шукану теплоємність системи

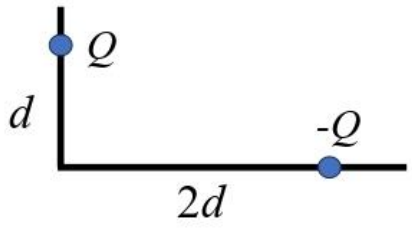
$$C = \frac{\delta Q}{dT} = 2nR\backslash\backslash(\text{молярна} C_m = 2R\backslash\backslash).$$

Її також можна виразити через початкові параметри:

$$nR = \frac{P_0 V_0}{T_0} \Rightarrow C = \frac{2P_0 V_0}{T_0}.$$

Задача 5. На непровідний, вигнутий під прямим кутом стрижень, нанизано дві кульки, якім надано заряди $+Q$ та $-Q$ (див. Рис.2). В початковий момент часу кульки нерухомі і знаходяться на відстанях d та $2d$ від прямого кута. Кульки відпускають і вони рухаються тільки під дією сили електростатичного притягання. В якій точці знаходиться кулька з негативним зарядом, коли кулька з позитивним зарядом торкається вершини кута? Які швидкості мають кульки в момент часу, коли між ними відстань d? Тертя відсутнє.

Рис.2 До задачі 5



Розв'язок:

Прискорення, з яким рухається горизонтальна кулька, у 2 рази більше за прискорення, з яким рухається вертикальна кулька. Тому вони досягнуть вершини кута одночасно. В момент часу, коли відстань між кульками d, швидкість другої кульки у 2 рази більша за швидкість першої $V_2 = 2V_1$. За законом збереження енергії:

$$-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+4d^2}} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{mV_1^2}{2} + \frac{m\left(2V_1\right)^2}{2}$$

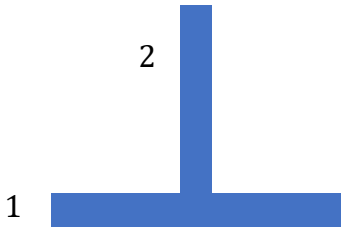
Звідки

$$V_1 = Q\sqrt{\frac{1-1/\sqrt{5}}{10\pi\varepsilon_0 md}}, \quad V_2 = 2V_1$$

Задача 6. Є два однакові (стальні) бруски. Один намагнічений, інший – ні. Як визначити, який з них намагнічений? Допоміжні пристрої чи прилади відсутні, бруски можна брати в руки.

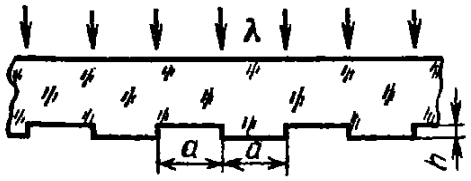
Розв'язок:

Розмістити бруски, як показано на рисунку. Якщо намагнічений брусок 1, то притягання не буде. Якщо 2 – буде.

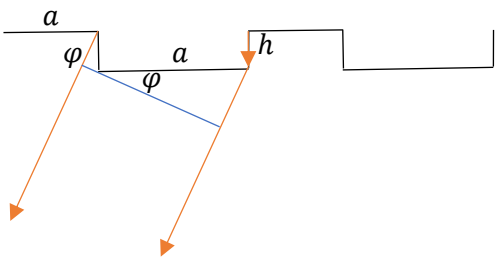


Задача 7. Плоска світлова хвиля з довжиною λ падає нормально на фазову дифракційну гратку з профілем, показаним на Рис.3. Гратку нанесено на скляній пластинці з показником заломлення n. Знайти глибину h штрихів, при якій інтенсивність центрального фраунгоферового максимуму рівна нулю. Який при цьому h кут дифракції, що відповідає першому максимуму?

Рис.3 До задачі 7



Розв'язок:



Різницяходудляпроменів(рис.):

$\Delta = hn + asin\varphi - hcos\varphi = (\text{прималих}\varphi) = h(n-1) + asin\varphi.$

якщо $\varphi = 0$, то $\Delta = h(n-1) = (2k-1)\lambda/2$ (для $I = 0$)

і $h = (2k-1)\lambda/2\frac{1}{(n-1)}$.

І тоді при цьому h для першого максимуму $\Delta = \lambda asin\varphi_1 = \lambda/2$

Задача 8. Ступінь поляризації частково поляризованого світла P=0.25. Знайти відношення інтенсивності поляризованої складової цього світла до інтенсивності природної складової.

Розв'язок:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Оскільки $I_{max} = I_{\text{пол}} + I_{\text{пр}}/2\,;\;\; I_{min} = I_{\text{пр}}/2$

То $P = \frac{I_{\text{пол}}}{I_{\text{пол}} + I_{\text{пр}}}$

І тоді $\frac{I_{\text{пол}}}{I_{\text{пр}}} = \frac{P}{1-P}$

Задача 9. Фотон, що випущений іоном He^+ при переході з першого збудженого стану в основний, іонізує атом H, що знаходиться в основному стані. Знайти швидкість фотоелектрона.

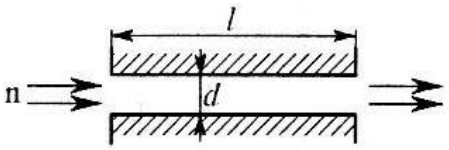
Розв'язок:

$$Z^2 R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2}\right) + \frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{4R}{m}} = 3.1 \cdot 10^6 \text{м/с}$$

Задача 10. Потік нейтронів, що летять зі швидкістю v=25 м/сек, падає на широку щілину з абсолютно відбиваючими стінками (див Рис.4) Довжина щілини l=1 см, висота d=10^{-4} см. Скільки часу нейтрон буде знаходитись всередині щілини, якщо він туди попаде? Скористатись співвідношенням невизначеності $\Delta p \Delta x \sim h$.

Рис. 4. До задачі 10.



Розв'язок:

$$\Delta p_\perp d \sim h$$

Оскільки

$$\Delta p_\perp \sim p$$

Тоді $\frac{p_\perp^2 + p_\parallel^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2}$, і $p_\parallel^2 = m^2 v_0^2 - p_\perp^2$

Або $v_\parallel^2 = v_0^2 - (h/md)^2$

І тоді $\tau = l/v_\parallel = \frac{l}{\sqrt{v_0^2 - (h/md)^2}}$